Varianta 51

Subiectul I.

a) $2\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{2}$

c) Ecuația căutată este: $(x-1)^2+(y-2)^2-8=0$.

d) Punctele L, M, N sunt coliniare, deoarece $\overrightarrow{LN}=2\cdot\overrightarrow{LM}$.

e) $V_{ABCD}=15$.

f) $a=-7$ şi $b=22$.

Subiectul II.

1.

a) Calcul direct.

b) Probabilitatea căutată este $p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

c) $g(11)=1$.

d) $x=0$.

e) $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-1$.

2.

a) $f'(x)=\frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}, \quad \forall x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{13}{10}$.

c) $f'(x)\ge 0, \quad \forall x\in\mathbf{R}$, deci f e strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{7}{3}$.

e) $\int_0^1 (e^x+\sin x)\,dx=e-\cos 1$.

Subiectul III.

a) $\det(A)=0$ şi $\operatorname{rang}(A)=2$.

b) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ şi $A^3=O_3$.

c) Se arată prin calcul direct.

d) Dacă pentru $X\in M_3(\mathbf{C})$ avem $f(X)=X^{2007}$ inversabilă, atunci şi

$\det\left(X^{2007}\right)=\left(\det(X)\right)^{2007}\neq 0$, deci $\det(X)\neq 0$, adică X este inversabilă.

e) $\det(Z)=0$ implică $a=0$ şi se arată uşor că $Z^3=O_3$.

f) $U=A$, $V=O_3$.

g) Presupunem că există $X\in M_3(\mathbf{C})$ astfel încât $f(X)=A$.

Din $X^{2007}=A$ obținem că $\det(X)=0$.

Mai mult, deoarece $XA=AX$ din **c)** **şi** **e)** rezultă că $X^3=O_3$, deci

$X^{2007}=\left(X^3\right)^{669}=O_3\neq A$, contradicție.

Subiectul IV.

a) $I_1=\dfrac{1}{6}$.

b) Evident.

c) Ridicând la puterea a n a şi apoi integrând dubla inegalitate de la **b)** obținem concluzia.

d) Se arată prin calcul direct.

e) Se foloseşte principiul I de inducție.

f) Din **d)** avem că $\forall k\in\mathbf{N}^*$, $I_k=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{2k}{2k+1}I_{k-1}$.

Înlocuindu-l succesiv pe k cu numerele 1, 2, ..., n în identitatea precedentă şi

înmulțind relațiile obținute, deducem că $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $I_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot 4^n\cdot I_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n+1}\cdot n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}$.

Din **e)** deducem: $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}>\sqrt{2n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}=+\infty$

şi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot 4^n\cdot I_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n}{2n-1}=+\infty$.